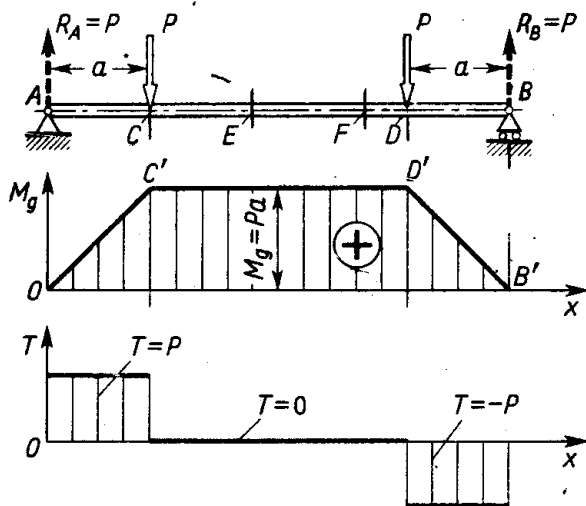
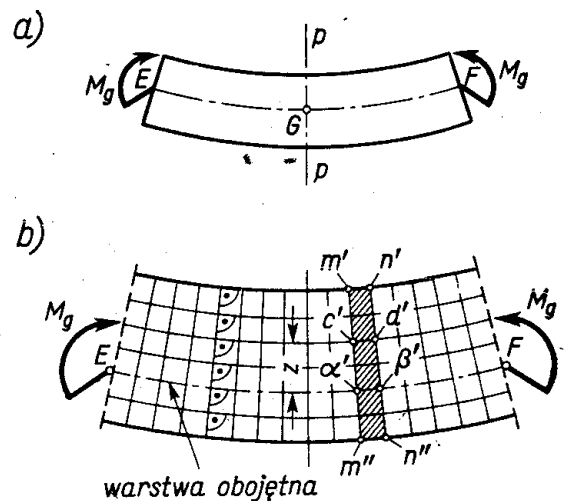


## 5.5. Naprężenia przy czystym zginaniu

Wyznaczenie naprężeń i odkształceń w danym przekroju belki rozpoczniemy od przypadku czystego zginania belki *pryzmatycznej*, gdy jej zgięcie zachodzi w płaszczyźnie działania momentu gnącego (płaszczyźnie rysunku).<sup>(1)</sup> Jeden ze sposobów realizacji tego stanu



Rys. 5.27. Realizacja czystego zginania



Rys. 5.28. Obraz odkształceń przy czystym zginaniu

pokazano na rys. 5.27. Na odcinku *CD* belki mamy tu stały moment  $M_g = Pa$  i siłę tnącą  $T = 0$ , co pokrywa się z definicją czystego zginania (art. 1.4 i 5.1). Jeśli pominąć pewien wpływ odcinków *AC* i *BD*, to elementy odcinka *CD* znajdują się w jednakowych

<sup>(1)</sup> Ilustracją tego jest zginanie belki o przekroju symetrycznym ustawionej symetrycznie względem płaszczyzny rysunku. Taka sytuacja nie jest jednak regułą. Wprowadzone ograniczenie wyróżnia zatem pewien szczególny przypadek zginania i związane jest ze specjalnym warunkiem podanym poniżej.

warunkach ( $M_g = \text{const}$ ,  $T = 0$ ) i jeśli jeden z nich ulega zakrzywieniu, to takie samo zakrzywienie mają pozostałe. Krzywizna belki na odcinku  $CD$  jest więc stała i belka wygina się w łuk koła. W tych warunkach *plaskie przekroje prostopadłe do osi belki przed odkształceniem muszą zostać płaskie i prostopadłe do zakrzywionej po odkształceniu osi belki.*<sup>(1)</sup> Wynika stąd, że przekroje te ulegają względnemu obrotowi (rys. 5.28b). Narysowana na bocznej powierzchni prostokątna siatka o bokach równoległych do osi zamienia się po odkształceniu na krzywoliniową z zachowaniem przy tym kątów prostych.

Na skutek obrotu przekrojów wzdłużne elementy belki, tzw. *włókna*, doznają odkształceń. Jak wiemy z art. 5.2, część włókien ulega skróceniu, część wydłużeniu. Między nimi musi więc być pewna warstwa  $E\alpha'\beta'F$ , tzw. *warstwa obojętna*, której wydłużenia są równe zeru. Załóżmy, że jej położenie oraz promień krzywizny  $\rho$  są znane. Narysujmy teraz fragment  $m-n$  belki przed i po odkształceniu (rys. 5.29). Pewne włókno  $cd$  leżące w odległości  $z$  od warstwy obojętnej  $\alpha\beta$  miało początkowo długość  $s$  taką jak inne włókna. Jego długość  $s'$  po odkształceniu jest

$$s' = s \frac{\rho - z}{\rho} = s \left( 1 - \frac{z}{\rho} \right). \quad (\text{a})$$

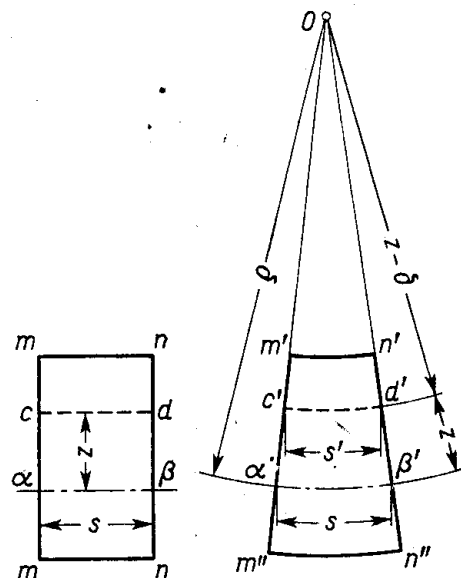
Wynika to z podobieństwa figur  $Oc'd'$  i  $O\alpha'\beta'$ , przy czym długość warstwy obojętnej  $\alpha'\beta'$  jest nadal  $s$ . Według definicji art. 1.6, względne odkształcenie  $\varepsilon = (s' - s)/s$ , i po podstawieniu  $s'$  z wzoru (a)

$$\varepsilon = -z/\rho. \quad (5.7)$$

Tak więc, *przy czystym zginaniu odkształcenia względne włókien są proporcjonalne do ich odległości od warstwy obojętnej.* Włókna powyżej warstwy obojętnej ( $z > 0$ ) ulegają skróceniu ( $\varepsilon < 0$ ), leżące zaś poniżej ( $z < 0$ ) ulegają wydłużeniu ( $\varepsilon > 0$ ). Zależność (5.7) wynika z rozważań geometrycznych. Jest więc słuszna niezależnie od tego, czy materiał jest, czy nie jest sprężysty.

Jeśli obciążenia belki są takie, że materiał jej zostaje sprężysty, to słuszne jest prawo Hooke'a. W tym miejscu wprowadzamy zweryfikowaną przez teorię sprężystości i doświadczenie hipotezę, że *ewentualne naciski (naprężenia) w kierunku poprzecznym do włókien można zaniedbać.* Wtedy każde włókno pracuje jak elementarny pręt na rozciąganie lub

<sup>(1)</sup> A oto dowód. Wydzielmy z belki (rys. 5.27) dowolny odcinek  $EF$  (rys. 5.28a). Punkty przekroju  $p-p$  symetrycznie położonego względem  $E$  i  $F$  nie mają przemieszczeń ani w prawo, ani w lewo, gdyż materia odkształca się w sposób ciągły (bez szczelin), a jedna i druga strona są równoprawne. Tak więc przekrój  $p-p$  zostaje płaski prostopadły do zakrzywionej osi  $EGF$ . Ponieważ każdy przekrój na odcinku  $CD$  belki jest płaszczyzną symetrii odpowiednio obranego odcinka  $EF$ , wynika stąd zatem sformułowany powyżej kanon.

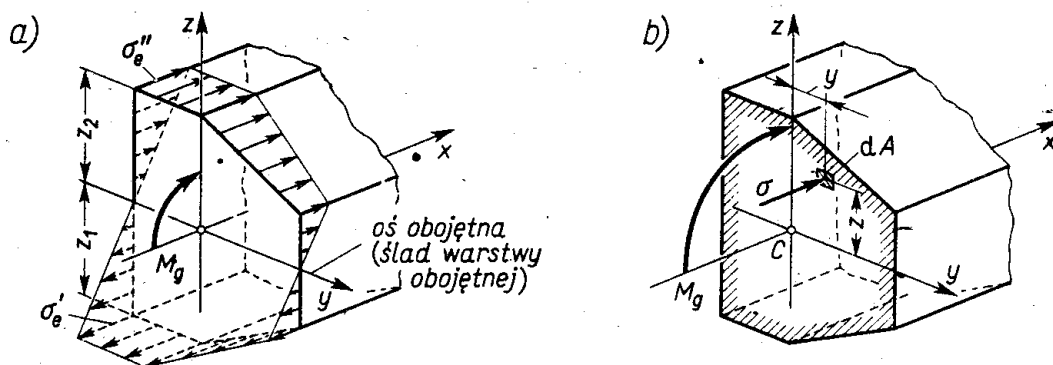


Rys. 5.29. Określenie odkształceń względnych

ściskanie. Uwzględniając (5.7) i prawo Hooke'a mamy w tym włóknie naprężenia

$$\sigma = E\varepsilon = -Ez/\rho. \quad (5.8)$$

Obraz naprężeń w przekroju poprzecznym (rys. 5.30) ma więc te same cechy i znaki co i odkształcenia względne.



Rys. 5.30. Obraz naprężeń przy czystym zginaniu

Mając prawo rozkładu  $\sigma$  określimy nie znane dotąd położenie warstwy obojętnej i jej promień krzywizny oraz wartości  $\sigma$  w funkcji momentu giętkiego. Zauważmy, że przy czystym zginaniu siła wzdłużna  $N = 0$ . Z drugiej strony siła ta jest równa algebraicznej sumie elementarnych sił  $\sigma dA$  (rys. 5.30b), czyli

$$N = 0 = \int_A \sigma dA = - \int_A (Ez/\rho) dA = -(E/\rho) \int_A z dA, \quad (b)$$

przy czym wielkości stałe  $E$  i  $\rho$  wyniesiono za znak całki. Z wzoru (b) wynika, że ślad warstwy obojętnej, czyli oś  $y$ , od której mierzymy odległości  $z$ , leży w przekroju tak, że

$$\int_A z dA = 0. \quad (c)$$

Całka ta jest momentem statycznym pola przekroju względem osi  $y$  i ma wartość równą zero, gdy oś ta jest centralna. Oś  $y$  jest z kolei prostopadłą do płaszczyzny  $zx$  zgięcia belki. Ujmując te fakty w jedno, powiemy, że ślad warstwy obojętnej, tzw. oś obojętna, jest osią centralną przekroju prostopadłą do płaszczyzny zgięcia.

Podobnie wykorzystamy warunek momentów. Moment elementarnej siły  $\sigma dA$  względem osi  $y$ , obliczony przy założeniu  $\sigma > 0$ , jest  $-\sigma z dA = Ez^2 dA/\rho$ . Suma takich wszystkich momentów musi być równa momentowi wypadkowemu, czyli  $M_g$ . Wynika stąd

$$M_g = \int_A (E/\rho) z^2 dA = (E/\rho) \int_A z^2 dA. \quad (d)$$

Figurująca we wzorze (d) całka jest znanym już z art. 4.1 momentem bezwładności  $J_y$  pola przekroju względem osi  $y$ , tj. osi obojętnej. Wprowadzając to pojęcie do wzoru (d) mamy zależność

$$\frac{EJ_y}{\rho} = M_g \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EJ_y}, \quad (5.9)$$

wyrażającą, że krzywizna warstwy obojętnej, tj.  $1/\rho$ , jest proporcjonalna do momentu gnącego, a odwrotnie proporcjonalna do iloczynu  $EJ_y$ , tzw. *sztywności na zginanie*.

Wyznaczając z (5.9):  $E/\rho = M_g/J_y$  i wstawiając do (5.8) mamy

$$\sigma = -\frac{M_g z}{J_y}. \quad (5.10)$$

Tak więc wartość naprężenia  $\sigma$  w danym włóknie jest proporcjonalna do momentu gnącego, a odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności przekroju. Jak widać, wartość ta nie zależy od rodzaju materiału, o ile tylko jest on sprężysty. Ekstremalne naprężenia ściskające  $\sigma_e''$  i rozciągające  $\sigma_e'$  występują we włóknach, których odległości  $z_2$  i  $z_1$  od osi obojętnej są największe (rys. 5.30a). Ich wartość wyrażamy w postaci

$$\sigma_e' = M_g/W_y', \quad \sigma_e'' = -M_g/W_y'', \quad (5.11)$$

gdzie tzw. *wskazniki wytrzymałości na zginanie*  $W_y'$  i  $W_y''$

$$W_y' = J_y/z_1, \quad W_y'' = J_y/z_2 \quad (5.12)$$

są wielkościami czysto geometrycznymi o dodatniej wartości. Ich wymiarem jest  $\text{cm}^3$ . Dla prostokąta na przykład (rys. 4.3)

$$W_y' = W_y'' = bh^2/6, \quad (e)$$

a dla przekroju kołowego drażonego (patrz zadanie 2 art. 4.1)

$$W_y' = W_y'' = (\pi d_z^3/32) [1 - (d_w/d_z)^4] \approx 0,1 d_z^3 [1 - (d_w/d_z)^4]. \quad (f)$$

Dla takich symetrycznych względem osi  $y$  przekrojów mamy  $W_y' = W_y'' = W_y$  i ekstremalne naprężenia  $|\sigma_e'| = |\sigma_e''|$ . Na ogół tak nie jest i obie te wartości należy zawsze określić.

Obliczmy z kolei sumę momentów sił  $\sigma dA$  względem osi  $z$ . Elementarny moment jest  $\sigma dA y = -Ezy dA/\rho$ , a ich suma

$$-\int_A (Ezy/\rho) dA = -(E/\rho) \int_A yz dA = -EJ_{yz}/\rho, \quad (g)$$

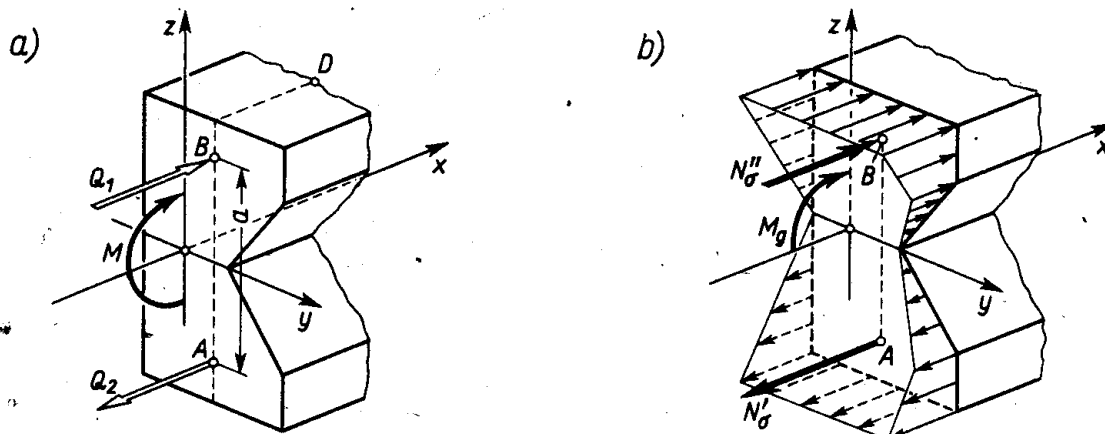
gdzie  $J_{yz}$  — odśrodkowy moment bezwładności przekroju względem centralnych osi  $y$  i  $z$ , znany już z art. 4.3. Ponieważ *na początku założono*, że wypadkowy moment działa w płaszczyźnie zgięcia  $xz$ , to jest rzeczą oczywistą, że wartość wyrażenia (g) jest równa zeru, co daje

$$J_{yz} = 0, \quad (5.13)$$

czyli że centralne osie  $y$  i  $z$  są *główne*. Warunek (5.13) jest tu konsekwencją początkowego założenia. Odwracając kolejność powiemy, że *zgięcie belki zachodzi w płaszczyźnie działania momentu zginającego tylko wtedy, gdy ta płaszczyzna przechodzi przez główną centralną oś przekroju*. Takie zgięcie nazywamy *prostym*, w odróżnieniu od zginania *ukośnego*, gdy płaszczyzna działania momentu nie pokrywa się z główną centralną osią przekroju.

Fizyczny sens rozważań prowadzących od wzoru (5.8) do wzorów (5.10) i (5.13) jest w gruncie rzeczy taki sam, jak w elementarnym zadaniu rozłożenia momentu  $M$  na dwie równoległe siły  $Q_1$  i  $Q_2$  (rys. 5.31a). Siły te muszą tworzyć parę sił, skąd  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Ich moment  $Qa$  musi być równy  $M$ . Wreszcie ich płaszczyzna działania  $AB$  musi być równoległa do płaszczyzny  $xz$  działania momentu  $M$ . Te same trzy etapy mieliśmy w na-

szych rozważaniach, z tym że zamiast dwóch sił  $Q$  było nieskończenie wiele sił  $\sigma dA$  związanych zależnością (5.8). I tak etap pierwszy, dający w wyniku wzór (c), odpowiada stwierdzeniu, że  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Etap drugi, kończący się wzorem (5.10), odpowiada w elementarnym zadaniu wynikowi  $Qa = M$ . Wreszcie etap trzeci, kończący się wzorem



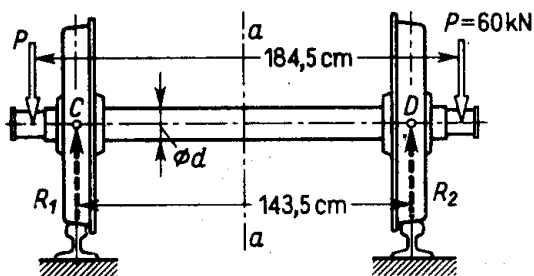
Rys. 5.31. Analogia zagadnień: a) rozkładu momentu  $M$  na parę sił  $Q_1 = Q_2$  i b) wyznaczenia naprężeń  $\sigma$  przy zginaniu

(5.13), to stwierdzenie, że wypadkowa  $N''_\sigma$  wszystkich elementarnych sił ściskających i taka sama wypadkowa  $N'_\sigma$  wszystkich sił rozciągających (rys. 5.31b) leżą w płaszczyźnie  $AB$  równoległej do płaszczyzny  $xz$  działania momentu  $M_g$ .

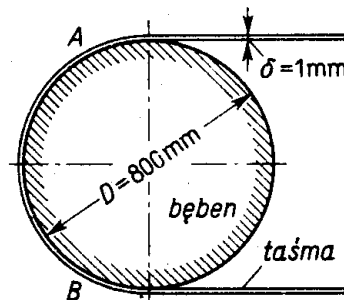
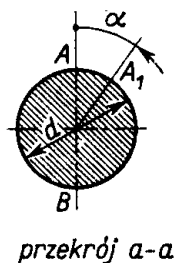
**Zadania**

1. Wyznaczyć średnicę  $d$  środkowej części osi wagonu (rys. 5.32), aby ekstremalne naprężenia  $\sigma_e \leq 75$  MPa,

Odp. Mamy tu czyste zgięcie;  $M_g = 12,3 \cdot 10^3$  N m;  $\bar{W}_y = \pi d^3/32$ . Z wzoru (5.11) i warunku na  $\sigma_e$  mamy  $d_{\min} = \sqrt[3]{32 M_g/\pi \sigma_e} = 11,9$  cm  $\approx 12$  cm.



Rys. 5.32. Do zadania 1 i 2



Rys. 5.33. Do zadania 4

2. Jak zmieniają się naprężenia we włóknie  $A$  osi z zadania 1, gdy wagon toczy się po szynach?

Odp. Punkt  $A$  przechodzi kolejno w  $A_1, B, A, \dots$ ; płaszczyzna  $AB$  działania momentu jest stała; w położeniu  $A_1$  według (5.10)  $\sigma = (M_g/J_y) (d \cos \alpha/2) = \sigma_e \cos \alpha = 75 \cos \alpha$  MPa; kąt  $\alpha = \omega t$ ; naprężenia zmieniają się cosinusoidalnie w funkcji czasu.

3. O jaki kąt  $\vartheta$  (w płaszczyźnie rysunku) obrócić się względem siebie przekroje  $C$  i  $D$  osi z zadania 1, jeśli  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa?

Odp. Kąt  $\vartheta = \overline{CD}/\rho = \overline{CD} (2\sigma_e/Ed) \approx 9,03 \cdot 10^{-3}$  rad  $\approx 0,52^\circ$ .

4. Pierwotnie prostą stalową taśmę ( $E = 2 \cdot 10^5$  MPa) nawinięto na bęben (rys. 5.33). Określić  $\sigma_e$  w odcinku  $AB$  taśmy, na którym przylega ona do bębna.

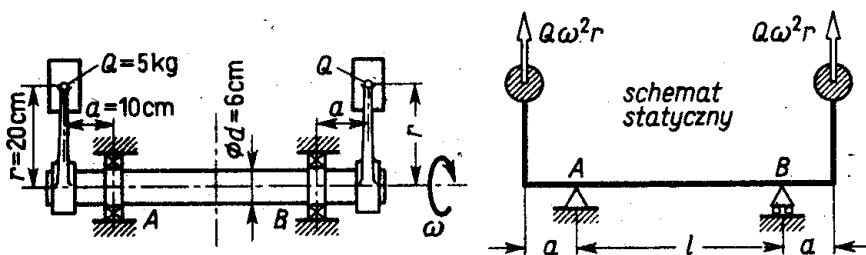
Odp. Na odcinku  $AB$  taśma staje się łukiem koła, a więc mamy tu czyste zginanie. Promień krzywizny warstwy obojętnej  $\rho = (D+\delta)/2$ , odległość  $z_{\max} = \pm \delta/2$  i z wzoru (5.8) mamy

$$|\sigma'_e| = |\sigma''_e| = Ez_{\max}/\rho = E\delta/(D+\delta) \approx E\delta/D = 250 \text{ MPa}.$$

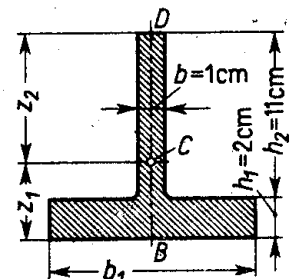
Takie zginanie taśm występuje w pilach taśmowych, wagach, przyrządach pomiarowych itp.

5. Osadzony w łożyskach  $A$  i  $B$  wałek z mimośrodowymi masami  $Q$  wiruje z  $\bar{n}$  obr/min (rys. 5.34). Pomijając odkształcenia ustroju oraz siły ciężkości, określić  $\bar{n}$ , aby na odcinku  $AB$  naprężenia  $\sigma_e \leq 100$  MPa.

Odp. Na odcinku  $AB$  mamy czyste zginanie; obciążenie stanowią siły bezwładności  $Q\omega^2 r$ ;  $M_g = Q\omega^2 r a$ ; przy  $W_y = \pi d^3/32$  i  $\sigma_e = 100$  MPa mamy z (5.11):  $\omega = \sqrt{\pi d^3 \sigma_e / 32 Q r a} = 146$  rad/s, skąd  $\bar{n} = 30\omega/\pi = 1390$  obr/min.



Rys. 5.34. Do zadania 5



Rys. 5.35. Do zadania 7

6. Dla przekrojów (rys. 4.5) obliczyć wskaźniki  $W'_y$  i  $W''_y$ .

Odp. Z racji symetrii  $W'_y = W''_y = W_y$ . Biorąc wyniki zadania 2 (art. 4.1) mamy: a)  $W_y = 94$  cm<sup>3</sup>; b)  $W_y = 43,6$  cm<sup>3</sup>; c)  $W_y \approx 117$  cm<sup>3</sup>.

7. Określić wymiar  $b_1$  żelaznej ławy (rys. 5.35), aby przy czystym zginaniu w płaszczyźnie  $DB$  stosunek naprężeń ściskających we włóknie  $D$  do rozciągających we włóknie  $B$  był 10/3.

Odp. Musimy dobrać  $b_1$  tak, aby  $z_1/z_2 = 3/10$ , przy czym  $z_1 + z_2 = h_1 + h_2 = h = 13$  cm, skąd  $z_1 = 3$  cm,  $z_2 = 10$  cm. Ponieważ

$$z_1 = [bh^2 + (b_1 - b)h_1^2]/2 [bh + (b_1 - b)h_1],$$

zatem przy danych  $b$ ,  $h$ ,  $h_1$  i  $z_1$  mamy  $b_1 = 12,4$  cm.

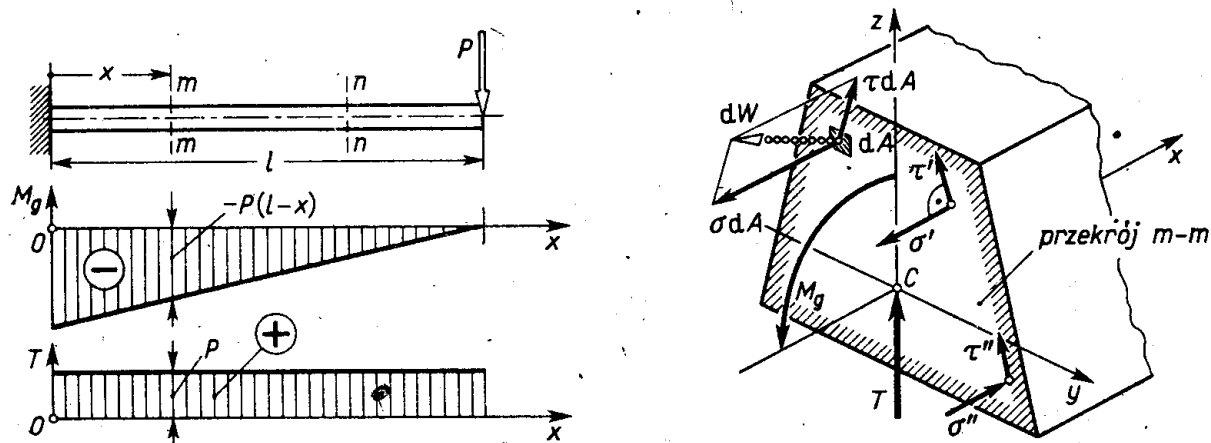
8. Obliczyć wartość  $M_g$  dla ławy z zadania 7, gdy wywołuje on we włóknie  $D$ : a) ściskanie, b) rozciąganie, a dopuszczalne naprężenia na ściskanie  $k_c = 100$  MPa, na rozciąganie  $k_r = 30$  MPa.

Odp.  $J_y = 441$  cm<sup>4</sup>. Dla włókna  $D$  jest  $W''_y = 44,1$  cm<sup>3</sup>. Przy jego ściskaniu  $M_g = k_c W''_y = 4410$  N m, przy rozciąganiu  $M_g = k_r W''_y = 1320$  N m.

## 5.6. Naprężenia przy zginaniu poprzecznym

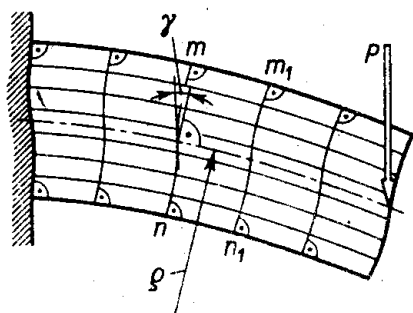
Jak już wiemy, przy zginaniu poprzecznym (rys. 5.36) wysiłek przekroju stanowi moment gnący  $M_g$  i siła tnąca  $T$ . Przy takiej postaci wysiłku elementarne siły  $dW$  rozłożone w sposób ciągły na przekroju mają nie tylko składowe  $\sigma dA$  normalne do przekroju, lecz

i składowe styczne  $\tau dA$ . Wypadkową ze składowych  $\sigma dA$  jest moment  $M_g$ , wypadkową ze składowych  $\tau dA$  jest siła  $T$ . Jest ponadto rzeczą jasną, że naprężenia  $\sigma$  w podobnych punktach *różnych* przekrojów, jak  $m-m$  i  $n-n$ , mają *różne* wartości, albowiem *różne* są w tych przekrojach momenty gnące.

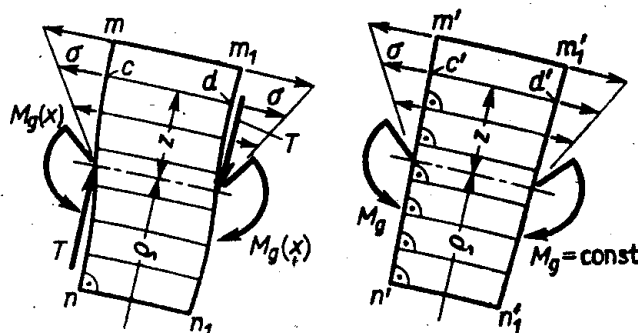


Rys. 5.36. Obraz naprężeń przy zginaniu poprzecznym

Istnienie naprężeń  $\tau$  oraz zmiana wartości  $\sigma$  w funkcji  $x$  powodują, że obraz odkształceń pierwotnie prostokątnej siatki przedstawia się jak na rys. 5.37. W porównaniu z analogicznym obrazem dla czystego zginania (rys. 5.28) obserwujemy tu, że kąty między bokami odkształconej siatki nie są na ogół proste. Ta zmiana postaci określona kątem  $\gamma$  występuje najsilniej w środkowych oczkach siatki, natomiast w oczkach obejmujących włókna skrajne jest ona niezauważalna. Ponieważ naprężenia styczne są proporcjonalne do kąta  $\gamma$



Rys. 5.37. Obraz odkształceń



Rys. 5.38. Określenie naprężeń normalnych

(art. 3.1), zaobserwowany więc fakt świadczy, że w przekroju poprzecznym belki naprężenia styczne  $\tau$  są rozłożone *nierównomiernie*. Powoduje to, że linie proste pierwotnie prostopadłe do osi belki stają się po odkształceniu zakrzywione, a pierwotnie płaskie przekroje poprzeczne przestają być płaskimi.

Dokładniejsze badania doświadczalne oraz teoria sprężystości wykrywają jeszcze jeden podstawowy fakt. Okazuje się, że naprężenia  $\tau$  mają mały, a niekiedy nawet zerowy, wpływ na względne wydłużenia włókien belki i że wydłużenia te zależą *głównie* od lokalnej wartości  $M_g(x)$ . Innymi słowy, jeśli w dwóch identycznych elementach belki, z których jeden podlega zginaniu poprzecznemu, a drugi zginaniu czystemu (rys. 5.38), mamy

$M_g(x) = M_g$ , to odkształcenia  $\varepsilon$  odpowiadających sobie włókien  $cd$  i  $c'd'$  są praktycznie jednakowe. To samo stwierdzenie dotyczy naprężeń  $\sigma$ . Wynika stąd, że zależności (5.7) ÷ ÷(5.12) można stosować z techniczną dokładnością w przypadku zginania poprzecznego, wstawiając zamiast  $M_g = \text{const}$  zmienny moment  $M_g(x)$ . W szczególności zamiast wzorów (5.10) i (5.11) mamy

$$\sigma = -\frac{M_g(x)z}{J_y}, \quad (5.14)$$

$$\sigma'_e = M_g(x)/W'_y, \quad \sigma''_e = -M_g(x)/W''_y. \quad (5.15)$$

Podobnie zamiast wzoru (5.9) mamy obecnie zależność

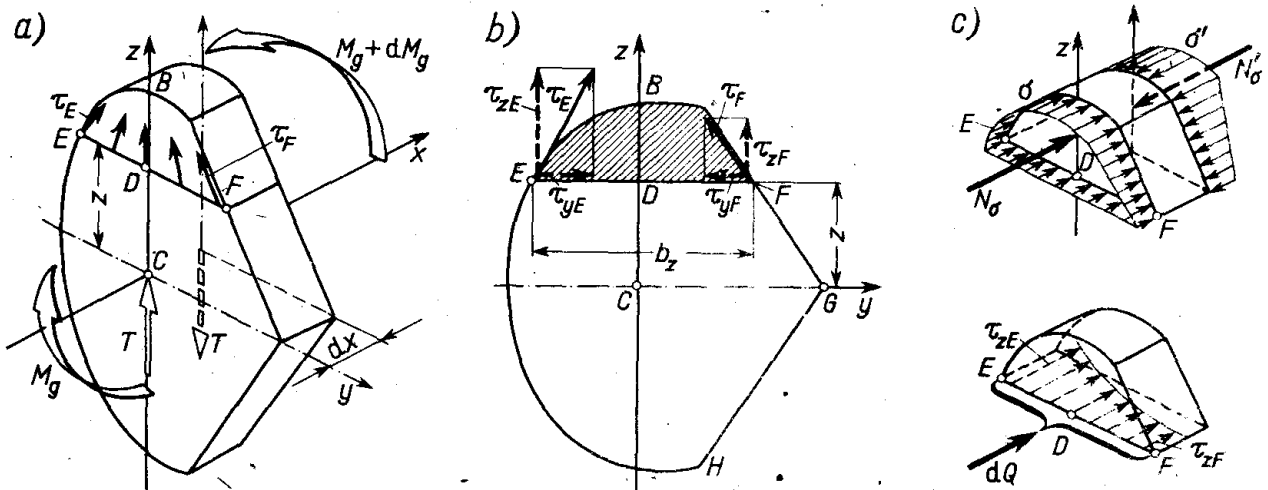
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g(x)}{EJ_y}, \quad (5.16)$$

określającą krzywiznę warstwy obojętnej jako funkcję  $x$ .

Określenie rozkładu naprężeń stycznych jest ogólnie rozwiązane w teorii sprężystości. W nauce wytrzymałości materiałów przy ograniczonych środkach analizy zadowolamy się rozwiązaniami uproszczonymi. Najdalej idące jest założenie, że naprężenia  $\tau$  są równomiernie rozłożone w przekroju poprzecznym i mają kierunek osi  $z$  (rys. 5.36). W takim ujęciu wartość  $\tau = \tau_{sr}$ :

$$\tau_{sr} = T/A = \text{const}, \quad (5.17)$$

otrzymujemy z warunku, że siła tnąca  $T$  jest wypadkową elementarnych sił  $\tau dA$ . Wynik (5.17), mimo swego prymitywizmu, ma pewne znaczenie, daje bowiem rząd wielkości  $\tau$ .



Rys. 5.39. Określenie naprężeń  $\tau$  w belce o przekroju zwartym

W rzeczywistości żadne z dwóch poprzednich prymitywnych założeń nie jest uzasadnione. W ogólnym przypadku (rys. 5.39a) kierunki naprężeń  $\tau_E$  i  $\tau_F$  mają na pewno kierunki stycznych do konturu<sup>(1)</sup>. Z racji ciągłości zjawisk naprężenia w innych włóknach warstwy  $EF$

<sup>(1)</sup> Wynika to z identycznego rozumowania jak w przypadku skręcania prętów (rys. 3.15 i 3.17).



mają jakieś kierunki pośrednie. Wobec tego upada założenie, że naprężenia  $\tau$  są równoległe do osi  $z$ . Nie do przyjęcia jest również założenie o równomierności rozkładu  $\tau$ , gdyż stoi to w jawnej sprzeczności z doświadczeniem. W tej skomplikowanej sytuacji dla otrzymania *drugiego przybliżenia* wartości  $\tau$  zadowolamy się określeniem *średnich* naprężeń  $\tau$  dla włókien warstwy  $EF$  odległej o  $z$  od osi obojętnej  $y$ . W tym celu wypadkowe naprężenia, jak  $\tau_E$ , rozkładamy na składowe  $\tau_{yE}$  i  $\tau_{zE}$  (rys. 5.39b). Dla określenia składowych  $\tau_z$  stosujemy teraz chwyt, polegający na *dotatkowym* rozcięciu badanego plasterka belki poziomą płaszczyzną  $EDF$ . Umożliwia to zbadanie równowagi nie całości plasterka, lecz jednej jego części, np. górnej. Na część tę działają naprężenia normalne  $\sigma$  i  $\sigma'$  w równoległych przekrojach plasterka oraz naprężenia styczne  $\tau_z$  na płaszczyźnie  $EDF$  (rys. 5.39c). Istnienie tych ostatnich wynika z zasady symetrii naprężeń stycznych. Obliczmy teraz wypadkowe siły działające w kierunku osi  $x$  na tych trzech ścianach. Wypadkowa  $N_\sigma$  z naprężeń  $\sigma$  na ścianie  $BEF$  jest

$$N_\sigma = \int_{EF} \sigma dA, \quad (a)$$

gdzie symbol  $\int_{EF}$  oznacza sumowanie sił  $\sigma dA$  na części przekroju powyżej linii  $EDF$ . Wstawiając  $\sigma$  z (5.14) mamy<sup>(1)</sup>

$$N_\sigma = \int_{EF} (M_g/J_y) z^* dA = (M_g/J_y) \int_{EF} z^* dA = M_g S_y^{(z)}/J_y, \quad (b)$$

gdzie  $S_y^{(z)} = \int_{EF} z^* dA$  — moment statyczny względem osi obojętnej  $y$  pola leżącego powyżej linii  $EDF$  (zakreskowane na rys. 5.39b).

Podobnie określamy wypadkowa  $N'_\sigma$  z naprężeń  $\sigma'$  na ścianie równoległej do  $BEF$ , gdzie moment gnący jest  $M_g + dM_g$ ,

$$N'_\sigma = (M_g + dM_g) S_y^{(z)}/J_y. \quad (c)$$

Wreszcie oznaczając przez  $\tau_z$  *średnią wartość* naprężeń stycznych w płaszczyźnie  $EDF$  mamy wypadkową ich  $dQ$ :

$$dQ = \tau_z b_z dx. \quad (d)$$

Ponieważ badana część plasterka jest w równowadze, zatem  $N_\sigma + dQ - N'_\sigma = 0$  i po wykorzystaniu (b), (c) i (d) otrzymujemy

$$\tau_z b_z = \frac{dM_g}{dx} \frac{S_y^{(z)}}{J_y} = \frac{TS_y^{(z)}}{J_y}, \quad (5.18)$$

albowiem według (5.2) pochodna  $dM_g/dx = T$ .

Zbadajmy dla przykładu przekrój prostokątny (rys. 5.40). Podstawiając  $b_z = b = \text{const}$ ,

<sup>(1)</sup> Aby odróżnić rzędną  $z$  warstwy  $EDF$  od współrzędnej pola  $dA$ , tę ostatnią oznaczono przejściowo przez  $z^*$ .

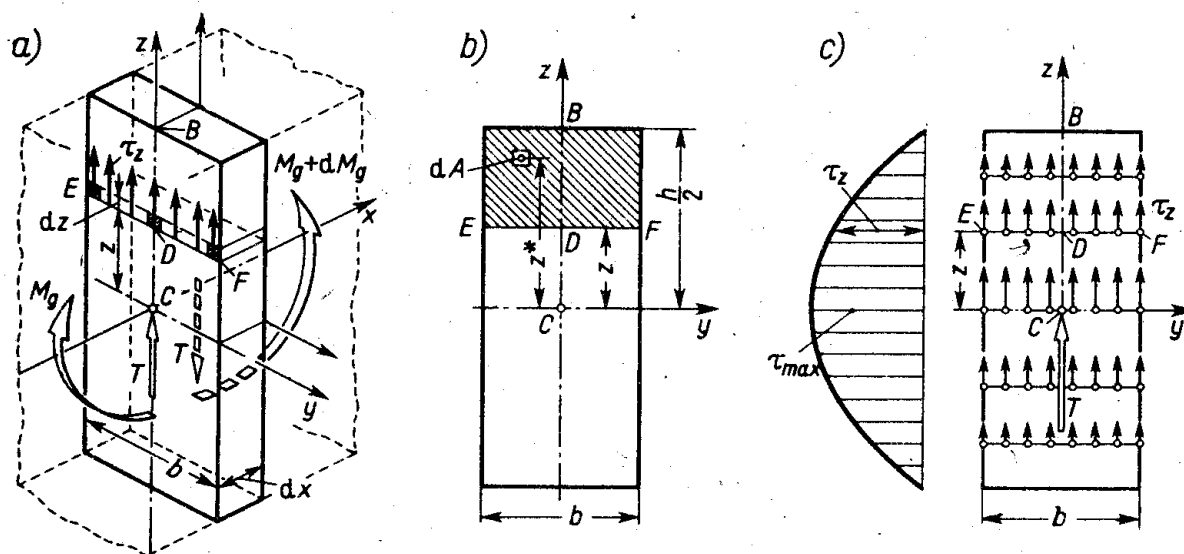
$J_y = bh^3/12$  oraz

$$S_y^{(z)} = \int_z^{h/2} z^* b dz^* = b \left| \frac{(z^*)^2}{2} \right|_z^{h/2} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (e)$$

otrzymujemy z zależności (5.18) następujący wynik:

$$\tau_z = (3T/2bh) [1 - (2z/h)^2] = (3\tau_{sr}/2) [1 - (2z/h)^2], \quad (f)$$

gdzie  $\tau_{sr} = T/bh$  jest średnią wartością  $\tau_z$  określoną z (5.17). Jak widać, zależność  $\tau_z$  od  $z$  jest paraboliczna (rys. 5.40c), naprężenie  $\tau_{max} = 1,5\tau_{sr}$  występuje we włóknach warstwy



Rys. 5.40. Określenie  $\tau_z$  w belce o przekroju prostokątnym

obojętnej ( $z = 0$ ). We włóknach skrajnych ( $z = \pm h/2$ ) mamy  $\tau_z = 0$  i  $\gamma = 0$ , co zgadza się z doświadczeniem (rys. 5.37). Widać również, że wypadkowa sił  $\tau_z dA = \tau_z b dz$  jest

$$\int_A \tau_z dA = \int_{-h/2}^{+h/2} (3\tau_{sr}/2) [1 - (2z/h)^2] b dz = (3\tau_{sr}/2) b (2h/3),$$

a więc jest ona równa  $\tau_{sr} bh = \tau_{sr} A = T$ , jak być musi.

Podobnie dla przekroju kołowego (rys. 5.41a) wyznaczamy<sup>(1)</sup>

$$S_y^{(z)} = d^3 \sin^3 \alpha / 12, \quad J_y = \pi d^4 / 64, \quad b_z = d \sin \alpha,$$

<sup>(1)</sup> Moment statyczny elementarnego paska  $b_z^* dz^*$  jest  $b_z^* z^* dz^*$ , a moment  $S_y^{(z)}$  całego pola powyżej linii  $EF$

$$S_y^{(z)} = \int_z^{d/2} b_z^* z^* dz^*.$$

Wprowadzając kąt  $\alpha^*$  jako nową zmienną, mamy

$$b_z^* = d \sin \alpha^*, \quad z^* = (d/2) \cos \alpha^*, \quad dz^* = -(d/2) \sin \alpha^* d\alpha^*.$$

Dolna granica całkowania jest  $\alpha^* = \alpha$ , górna  $\alpha^* = 0$ . W wyniku

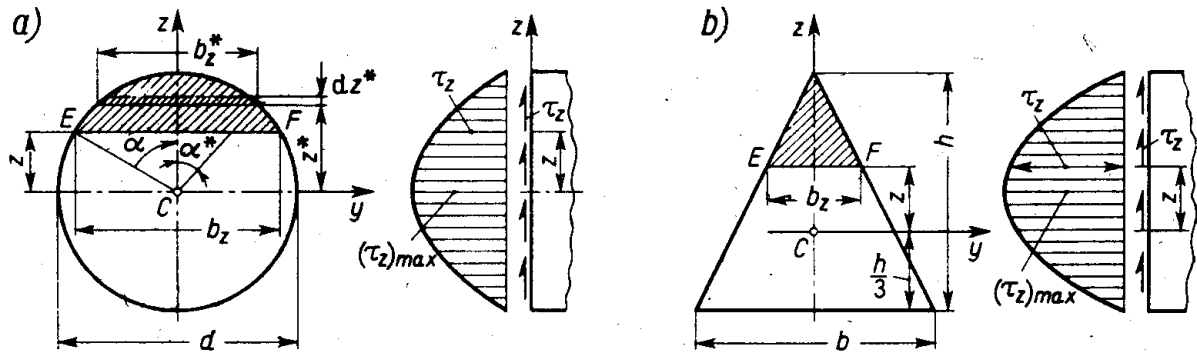
$$S_y^{(z)} = - \int_{\alpha}^0 (d^3/4) \sin^2 \alpha^* \cos \alpha^* d\alpha^* = d^3 \sin^3 \alpha / 12.$$

przy czym położenie badanej warstwy  $EF$  określono kątem  $\alpha$ , a nie współrzędną  $z$ . Po podstawieniu do (5.18) mamy

$$\tau_z = (16T/3\pi d^2) \sin^2 \alpha = (4\tau_{sr}/3) \sin^2 \alpha, \quad (g)$$

gdzie  $\tau_{sr} = 4T/\pi d^2 = T/A$ . Jak widać, maksymalne  $\tau_z$  występują w warstwie obojętnej ( $\sin \alpha = 1, z = 0$ ) i są one

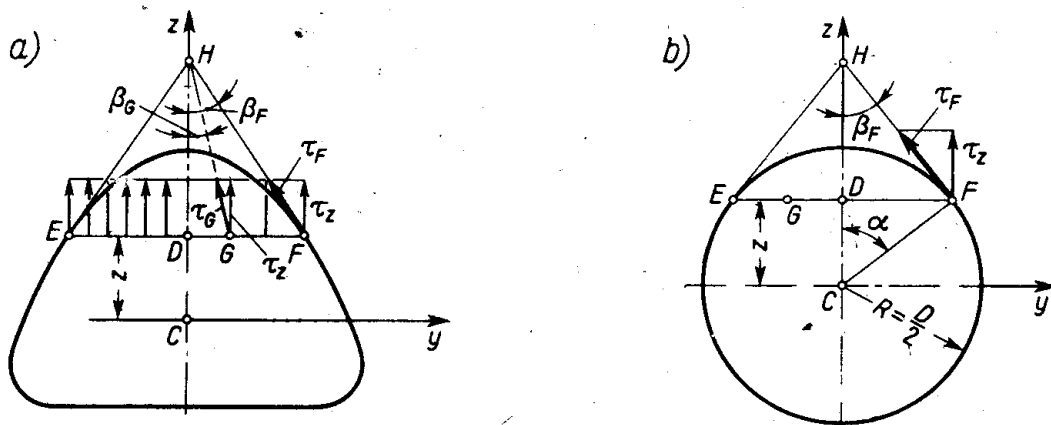
$$\tau_{max} = 4T/3A = (4/3) \tau_{sr}. \quad (h)$$



Rys. 5.41. Przykłady obliczenia naprężeń stycznych

Dla innych włókien przebieg  $\tau_z$  uwidocznił na rysunku. Z tych przykładów widać, że dla włókien skrajnych wzór (5.18) daje  $\tau_z = 0$ . Wynik ten nie jest przypadkowy. W dowolnym przekroju (rys. 5.39), gdy badana warstwa  $EDF$  zbliża się do górnych skrajnych włókien, wówczas pole zakreskowane na rys. 5.39b maleje i jego moment  $S_y^{(z)} \rightarrow 0$ . Gdy badana warstwa zbliża się do dolnych skrajnych włókien, wówczas zakreskowane pole obejmuje prawie cały przekrój i wtedy  $S_y^{(z)} \rightarrow 0$ , gdyż oś  $y$  jest centralna.

W niektórych przypadkach wzór (5.18) „udoskonalamy” uwzględniając rzeczywiste kierunki działania naprężeń  $\tau$ . Na przykład w przekroju symetrycznym względem osi  $z$  (rys. 5.42a) kierunki  $\tau$  dzia-



Rys. 5.42. Uwzględnienie rzeczywistych kierunków naprężeń  $\tau$

łających w punktach  $E, D$  i  $F$  przecinają się w jednym punkcie  $H$ . Racjonalnie jest założyć, że linia działania naprężenia w innym punkcie  $G$  tejże warstwy przechodzi też przez punkt  $H$ . Przyjmując obliczoną z (5.18) wartość  $\tau_z$  jako prawdziwą dla wszystkich punktów, możemy wyznaczyć „rzeczy-

wiste" naprężenie. Na przykład dla punktów  $F$  i  $G$  mamy

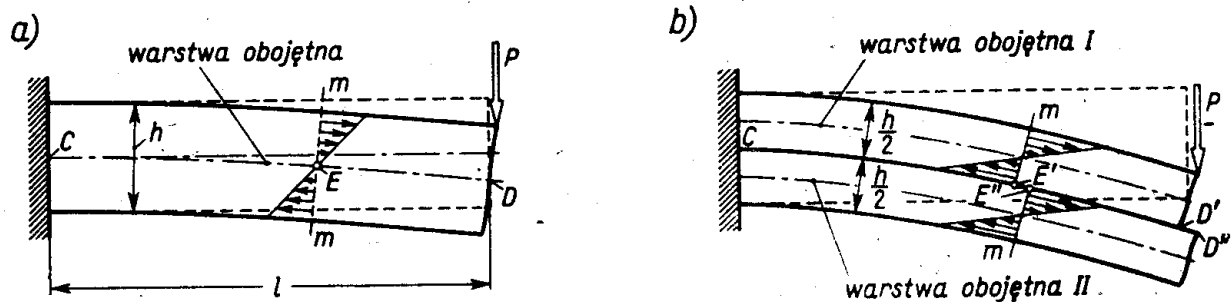
$$\tau_F = \tau_z / \cos \beta_F, \quad \tau_G = \tau_z / \cos \beta_G. \quad (i)$$

W przekroju kołowym (rys. 5.42b), gdzie  $\beta_F = 90^\circ - \alpha$ , wzór (i) przy wykorzystaniu wyniku (g) daje

$$\tau_F = (4\tau_{sr}/3) \sin \alpha. \quad (i)$$

Gdy kontur przekroju nie ma ostrych naroży, korekta według wzoru (i) daje wyniki bliższe rzeczywistości niż wzór (5.18) (błąd rzędu 6%).

Istnienie naprężeń  $\tau_z$  w płaszczyznach równoległych do warstwy obojętnej nie jest fikcją, lecz stanowi przejaw fizycznych więzów. Można się o tym przekonać, porównując obrazy odkształceń: pierwotnej belki (rys. 5.43a) i tejże belki po rozcięciu jej w płaszczyźnie  $CED$  (rys. 5.43b). Każda z części tej drugiej belki zgina się niezależnie (pomijając tarcie). W każdej z nich górne włókna są rozciągane, a dolne ściskane. W miejscu rozcięcia ściskana warstwa  $CE'D'$  górnej części ślizga się po rozciąganej warstwie  $CE''D''$  dolnej części. Tęgo zjawiska nie ma w pierwotnej belce, dzięki czemu jest ona znacznie sztywniejsza, a naprężenia w niej mniejsze niż w przypadku belki rozciętej.



Rys. 5.43. Wpływ usunięcia więzów między płaszczyznowych na odkształcenia przy poprzecznym zginaniu

Podsumowując stwierdzamy, że w belkach o przekroju zwartym (koło, prostokąt itd.) strefa maksymalnych naprężeń stycznych znajduje się w środkowej części przekroju, a wartość  $\tau_{\max}$  jest rzędu  $\tau_{sr} = T/A$ . Inna jest sytuacja, gdy przekrój jest cienkościenny (rys. 3.22). Określenie naprężeń  $\tau$  wiąże się tu z szeregiem innych zagadnień rozpatrzonych w rozdz. 13.

### Zadania

1. Belka (rys. 5.20), w której  $c_1 = c_2 = 1$  m,  $l_1 = 4$  m,  $q = 2$  kN/m, ma przekrój teowy (rys. 5.35). Biorąc wyniki zadania 8 (art. 5.5) wyznaczyć  $\sigma_c$  w niebezpiecznych przekrojach.

Odp. Według rys. 5.20d niebezpieczny może być przekrój nad podporą, gdzie  $M_g = -qc_1^2/2 = -10^3$  N m, bądź przekrój środkowy, gdzie  $M_g = (ql_1^2/8) - (qc_1^2/2) = 3 \cdot 10^3$  N m. Oznaczając  $\sigma_D$  i  $\sigma_B$  naprężenia we włóknach  $D$  i  $B$  mamy w przekroju nad podporą  $\sigma_D = 22,7$  MPa,  $\sigma_B = -6,8$  MPa, a w przekroju środkowym  $\sigma_D = -68,1$  MPa,  $\sigma_B = 20,4$  MPa.

2. Belka (rys. 5.10) jest rurą o zewnętrznej średnicy  $d_z = 10$  cm. Dobrać wewnętrzną średnicę  $d_w$ , aby  $\sigma_e \leq k = 100$  MPa.

Odp. Niebezpieczny jest przekrój  $D$ , gdzie  $M_g = 3$  kN m. Przy  $\sigma_e = k$  niezbędny wskaźnik  $W_y =$

$= M_g/k = 30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 30 \text{ cm}^3$ . Ponieważ  $W_y = (\pi d_z^3/32) [1 - (d_w/d_z)^4]$ , zatem  $1 - (d_w/d_z)^4 = 0,307$  i  $d_w/d_z = 0,913$  oraz  $d_w \leq 9,13 \text{ cm}$ , na przykład  $d_w = 9,1 \text{ cm}$ .

3. Jaki jest promień  $\rho$  krzywizny warstwy obojętnej w przekrojach  $A$ ,  $D$ ,  $F$  belki z zadania poprzedniego, jeśli  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ?

Odp. Moment bezwładności  $J_y = W_y d_z/2 = 150 \text{ cm}^4 = 150 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ , sztywność  $EJ_y = 2,0 \cdot 10^{11} \times 150 \cdot 10^{-8} = 3,0 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$ . Z wzoru (5.16)  $\rho = EJ_y/M_g$  i biorąc dane z rys. 5.10 mamy  $\rho_A = \infty$ ,  $\rho_D = 3,0 \cdot 10^5/3 \cdot 10^3 = 100 \text{ m}$ ,  $\rho_F = -150 \text{ m}$ . Odpowiedź  $\rho > 0$  oznacza wypukłość do dołu,  $\rho < 0$  wypukłość do góry.

4. Belka (rys. 5.14) o wymiarach  $a = 4 \text{ m}$ ,  $l = 6 \text{ m}$  jest dwuteówką (rys. 4.6a). Biorąc wyniki zadania 3 (art. 4.1) określić moment  $M_D^*$ , aby naprężenie  $\sigma_e \leq k = 160 \text{ MPa}$ .

Odp. Wskaźnik  $W_y = 337 \text{ cm}^3$ ; stąd  $(M_g)_{\text{ekstr}} = kW_y = 5,40 \cdot 10^4 \text{ N m}$ . Przy danych  $a$  i  $l$  jest  $(M_g)_{\text{ekstr}} = M_D^* a/l = 2M_D^*/3$ , skąd  $M_D^* = 1,5 (M_g)_{\text{ekstr}} = 1,5 \cdot 5,40 \cdot 10^4 = 8,10 \cdot 10^4 \text{ N m}$ .

5. Belka (rys. 5.6), w której  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$ ,  $P = 24 \text{ kN}$ , ma przekrój prostokątny ( $h = 18 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ). Wyznaczyć  $\sigma_e$  i  $\tau_{\text{max}}$ .

Odp. Niebezpieczny przekrój leży tuż na prawo od punktu  $E$ , bo  $M_g = (M_g)_{\text{ekstr}} = 16 \text{ kN m}$ , a jednocześnie działa tam większa siła tnąca  $T = 16 \text{ kN}$ . Z wzoru (5.15)  $\sigma_e = \pm 98,8 \text{ MPa}$ , z (5.17)  $\tau_{\text{sr}} = T/A = 2,96 \text{ MPa}$ , a z wzoru (f)  $\tau_{\text{max}} = 1,5\tau_{\text{sr}} = 4,44 \text{ MPa}$ . Jak widać,  $\tau_{\text{max}}$  jest wielokrotnie mniejsze (około 22 razy) od  $\sigma_e$ .

6. Belka (rys. 5.43a) o przekroju prostokątnym sklejona jest z dwóch drewnianych listew, każda o wymiarach  $b_1 = 4 \text{ cm}$  i  $h_1 = 3 \text{ cm}$ . Obliczyć naprężenia w kleju, jeśli  $P = 3 \text{ kN}$ .

Odp. Po sklejeniu mamy belkę o wymiarach  $b = b_1 = 4 \text{ cm}$  i  $h = 2h_1 = 6 \text{ cm}$ . Naprężenia w kleju  $\tau_x = \tau_{\text{max}} = 1,5\tau_{\text{sr}} = 1,5 \cdot 3000/(4 \cdot 6 \cdot 10^{-4}) = 1,88 \text{ MPa}$ , gdyż powierzchnia sklejenia pokrywa się z warstwą obojętną belki. Pomimo tak małej wartości, naprężenia te mogą decydować o bezpieczeństwie gdyż wytrzymałość kleju na ścinanie nie jest duża (rzędu  $10 \text{ MPa}$ ).

7. Obliczyć wartość  $\tau_x$  dla przekroju trójkątnego (rys. 5.41b).

Odp.  $\tau_x = (12T/bh^3) [(2h/3) - z] [(h/3) + z]$ ,  $\tau_{\text{max}} = 1,5\tau_{\text{sr}}$  dla  $z = h/6$ .

8. Wykorzystując zasadę symetrii naprężeń stycznych, określić rzeczywiste naprężenia  $\tau$  w punktach  $G$  i  $H$  przekroju (rys. 5.39b).

Odp. Zero. Patrz badanie  $\tau$  przy skręcaniu (rys. 3.15).

9. Wykorzystując wynik zadania 7 określić naprężenia  $\tau_F$  w punkcie  $F$  przekroju (rys. 5.41b) z korektą uwzględniającą rzeczywisty kierunek  $\tau$ . Przyjąć  $b = h = 9 \text{ cm}$ ,  $z = 1,5 \text{ cm}$ ,  $T = 10 \text{ kN}$ .

Odp.  $\tau_x = 3,7 \text{ MPa}$ . Postępując jak podano na rys. 5.42a, mamy  $\text{tg } \beta = b/2h = 0,500$ ,  $\cos \beta = 0,896$  i według wzoru (i)  $\tau_F \approx 4,1 \text{ MPa}$ .

10. Jaki jest sens fizyczny wyrażenia  $(TS_y^{(z)}/J_y)$ ?

Odp. Jest to różnica wypadkowych sił  $N'_\sigma$  i  $N_\sigma$  działających w przekrojach odległych o  $\Delta x = 1$  (rys. 5.39c), gdyż wzór (5.18) jest bilansem sił, w którym  $\tau_x b_x$  jest wypadkową średnich naprężeń  $\tau_x$  działających na pole o szerokości  $b_x$  i długości  $\Delta x = 1$ , a wypadkowa ta musi być równa  $N'_\sigma - N_\sigma$ .

11. W przekroju (rys. 5.39) zwiększono dwukrotnie: a) wszystkie wymiary, b) tylko rzędne, c) tylko odcięte. Jak zmieniają się wartości  $\tau_x$  w odpowiadających sobie punktach?

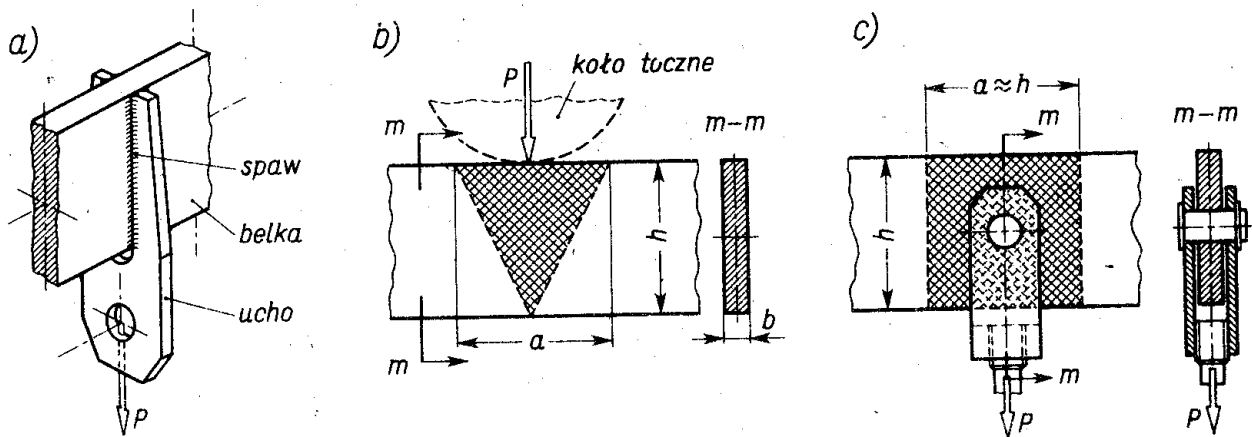
Odp. a) zmniejszą czterokrotnie, b) i c) zmniejszą dwukrotnie.

## 5.7. Zastosowania teorii

Jak wspomniano, zależności sformułowane w art. 5.6 są przybliżone, wobec czego istotna jest kwestia ich dokładności. Wyjaśnienie tego daje porównanie z wynikami teorii sprężystości.

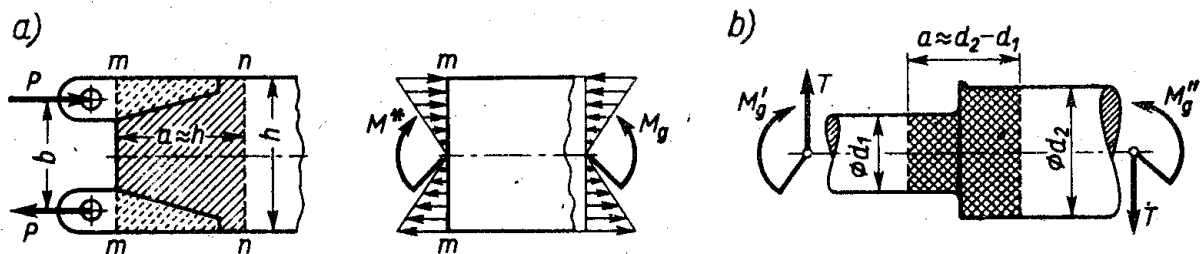
Dokładność wzoru (5.14) określającego naprężenia  $\sigma$  zależy od przebiegu siły tnącej. I tak, jeśli siła tnąca jest stała (rys. 5.36), to wzór (5.14) jest ścisły. Jeśli siła tnąca zmienia

się w sposób ciągły, jak na rys. 5.7, 5.11 itp., to różnica między wzorem (5.14) a wynikami ścisłymi jest rzędu  $(h/l)^2$ , gdzie  $h$  — gabarytowy wymiar w płaszczyźnie zginania,  $l$  — długość belki. Gdy siła tnąca zmienia się skokami (rys. 5.6, 5.10 i in.), różnice te w otoczeniu skoku siły  $T$  są rzędu  $(h/l)$ . Tak więc gdy w belce (rys. 5.7)  $h/l = 0,1$ , wówczas błąd wartości  $\sigma$  określonej z wzoru (5.14) jest rzędu 1%, jeśli jednak ta sama belka jest obciążona, jak na rys. 5.6, to w otoczeniu punktu  $E$  błąd wzoru (5.14) jest rzędu 10%. W tym drugim przypadku strefa takich odchyłek jest nieduża i obejmuje odcinek belki o długości równej w przybliżeniu wymiarowi  $h$ .



Rys. 5.44. Stosowność teorii zginania poprzecznego

Powyższe informacje odpowiadają rozwiązaniom konstrukcyjnym, w których obciążenia wprowadzono przez odpowiednie elementy na cały przekrój belki (rys. 5.44a). Inna jest sytuacja, gdy obciążenia stanowią ciśnienia kontaktowe od kół tocznych (rys. 5.44b). Występujące tu odchyłki są zupełnie innego rzędu i obejmują zakreskowany na rysunku obszar o długości  $a \approx h$ . Podobne znaczne odchyłki mamy przy innych wariantach wprowadzenia sił (rys. 5.44c), momentów skupionych (rys. 5.45a), bądź korbach (rys. 5.45b). Weźmy dla przykładu wprowadzenie momentu  $M^* = Pb$  (rys. 5.45a). Zgodnie z teorią



Rys. 5.45. Inne przypadki ograniczenia stosowności teorii zginania

(art. 5.5) moment ten w przekroju  $m-m$  należałoby zrealizować pod postacią naprężeń  $\sigma = -M^* z/J_y$ . Wprowadzenie jego za pośrednictwem okuć jako pary sił  $P$  zakłóca teoretyczny rozkład  $\sigma$ . Jest to zagadnienie podobne do rozpatrzonego w art. 2.1 i podobna też jest odpowiedź. Wykorzystując mianowicie zasadę de Saint-Venanta powiemy, że w przekroju  $n-n$  obydwa obciążenia  $M^*$  i para sił  $P$  dadzą praktycznie ten sam rozkład naprężeń,

o ile tylko  $M^* = Pb$ . Dla belek o przekroju zwartym odległość  $a$ , na której wystąpią znaczne odchyłki, jest

$$a \approx h. \quad (a)$$

Podobny rezultat mamy w przypadku rys. 5.44c, dla karbu natomiast odległość  $a$  uzależniamy od jego wysokości. W odróżnieniu od tego łagodna zmienność przekroju nie powoduje dużych odchyłek. Dla takich belek można z techniczną dokładnością ( $\pm 3\%$ ) obliczać naprężenia normalne z wzorów (5.14) wstawiając tylko odpowiadające danemu przekrojowi wielkości  $J_y$ , bądź  $W_y$ .

W porównaniu ze względnie dużą dokładnością wzoru (5.14), dokładność wzoru (5.18) określającego naprężenia styczne jest na ogół gorsza. Wyjątek stanowi przekrój prostokątny, dla którego wynik (f) jest ścisły, o ile tylko  $b \ll h$ . W innych przekrojach zwartych różnice między rzeczywistymi wartościami  $\tau$  a obliczonymi z wzoru (5.18) są z reguły kilkanaście procent, a bywają sytuacje, gdy są one stuprocentowe (zadanie 8 art. 5.6). Również niewielkie zmiany kształtu, np. łagodna zbieżność belki, powodują radykalne zmiany w rozkładzie naprężeń stycznych. Z tych powodów często zadowalamy się zgrubnym oszacowaniem wartości<sup>(1)</sup> naprężeń stycznych według wzoru (5.17). Na takie podejście wpływa również to, że wartość  $\tau_{\max}$  jest na ogół mała w porównaniu z  $\sigma_e$ . W miejscu na przykład zamocowania belki wspornikowej (rys. 5.43) o przekroju prostokątnym mamy  $\tau_{\max} = 3P/2bh$ ,  $\sigma_e = 6Pl/bh^2$ , a stosunek

$$\tau_{\max}/\sigma_e = h/4l. \quad (b)$$

Podobny rząd wielkości otrzymujemy i dla innych przekrojów zwartych. Wynika stąd, że naprężenia styczne mogą mieć istotny wpływ tylko w belkach krótkich, natomiast w *typowych* zagadnieniach, gdy  $h \ll l$ , są one praktycznie bez znaczenia.

To ostatnie spostrzeżenie wykorzystujemy do oceny bezpieczeństwa przy zginaniu poprzecznym, badając tylko ekstremalne naprężenia normalne. Dodatkowym uzasadnieniem jest to, że we włóknach skrajnych, w których działa  $\sigma_{\text{ekstr}}$ , mamy naprężenia  $\tau = 0$ . W typowych zatem zagadnieniach warunek bezpieczeństwa przy zginaniu czystym lub poprzecznym wyraża się zależnościami

$$\sigma'_e = \frac{M_g(x)}{W'_y} \leq k_r = \frac{R_{er}}{n_{er}}, \quad \left| \sigma''_e \right| = \left| -\frac{M_g(x)}{W''_y} \right| \leq k_c = \frac{R_{ec}}{n_{ec}}, \quad (5.19)$$

gdzie  $k_r$ ,  $R_{er}$ ,  $n_{er}$  — dopuszczalne naprężenie, granica plastyczności oraz współczynnik bezpieczeństwa przy rozciąganiu, a  $k_c$ ,  $R_{ec}$ ,  $n_{ec}$  także wielkości przy ściskaniu.

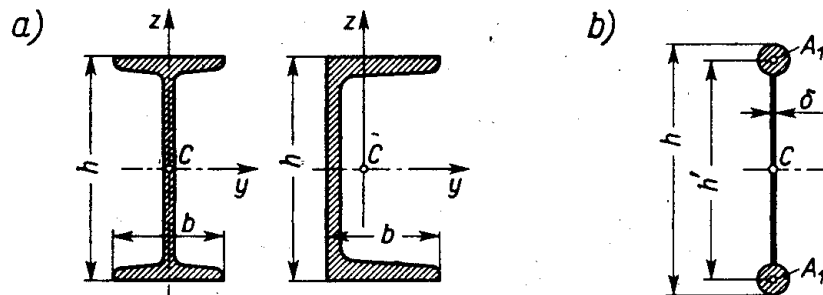
Dla materiałów mających  $R_{er} = R_{ec}$  (stal, dural) jest logiczne, aby współczynniki  $n_{er}$  i  $n_{ec}$  były równe. W belkach z takich materiałów środek ciężkości przekroju powinien znajdować się w połowie jego wysokości. Inna jest sytuacja dla materiałów takich jak żeliwo, gdy  $R_{ec} > R_{er}$  i  $k_c > k_r$ . Racjonalne wykorzystanie materiału jest wtedy, gdy jednocześnie

$$\sigma'_e = k_r, \quad \left| \sigma''_e \right| = k_c. \quad (c)$$

Z rysunku 5.30a widać, że postulat (c) jest spełniony, gdy  $z_1/k_c = z_2/k_r$ , czyli gdy odległości skrajnych włókien są proporcjonalne do odpowiednich naprężeń dopuszczalnych.

<sup>(1)</sup> Z wyłączeniem przekrojów cienkościennych (rozd. 13).

Z uwagi na ekonomię ciężaru belki celowy jest taki kształt przekroju, w którym przy małym zużyciu materiału otrzymujemy duży wskaźnik  $W_y$ . Jak widać z rys. 5.30 i 5.31, najcenniejszą częścią przekroju jest materiał w otoczeniu włókien skrajnych, albowiem jest on należycie wykorzystany ( $\sigma'_e \approx k_r$  lub  $|\sigma''_e| \approx k_c$ ) i jednocześnie najbardziej efektywny w przeniesieniu momentu gnącego (duża odległość  $z$ ). W przeciwieństwie do tego włókna środkowe są martwe ( $\sigma \approx 0$ ) i nieefektywne ( $z \approx 0$ ). Uwzględnienie tych faktów znajduje odbicie w belkach dwuteowych lub ceowych (rys. 5.46a), w których pasy stanowiące



Rys. 5.46. Racjonalne postacie przekrojów belek

dużą część przekroju są oddalone od warstwy obojętnej. Takie profile, z uwagi na ich rozpowszechnienie, są znormalizowane<sup>(1)</sup> w tablicach, w których poza wymiarami podane są też wartości  $J_y$  i  $W_y$ .

Idealem byłby przekrój, w którym całe pole  $A$  dzieliłoby się na dwa pasy  $A_1 = A/2$ , a udział ścianki łączącej pasy byłby pomijalny (rys. 5.46b). Uważając, że pola pasów są skupione w środkach ciężkości i przyjmując  $h \approx h'$  mamy  $J_y \approx 2(A/2)(h/2)^2 = Ah^2/4$ , a wskaźnik wytrzymałości

$$(W_y)_{idealne} = Ah/2. \quad (d)$$

Wartość ta może stanowić porównawczy wzorzec do oceny jakości danego przekroju. Dla prostokąta na przykład  $(W_y)_{idealne} = bh^2/2$ , a rzeczywista wartość  $W_y = bh^2/6$ . Ich stosunek

$$\eta_y = W_y/(W_y)_{idealne} = 0,33$$

stanowi miarę jakości. Podobnie dla przekroju kołowego pełnego

$$\eta_y = W_y/(W_y)_{idealne} = (\pi d^3/32)/[(\pi d^2/4)(d/2)] = 0,25.$$

W porównaniu z takimi przekrojami znormalizowane profile dwuteowe i ceowe są zdecydowanie lepsze, albowiem dla nich

$$(\eta_y)_{dwuteownika} \approx 0,64, \quad (\eta_y)_{ceowki} \approx 0,60.$$

Podana miara  $\eta_y$  jakości przekroju, tj.

$$\eta_y = 2W_y/Ah \quad (e)$$

odpowiada zginaniu w płaszczyźnie  $xz$ . Jeśli zgięcie zachodzi w płaszczyźnie  $xy$ , to osią obojętną będzie oś  $z$ , a o naprężeniach ekstremalnych decydować będą wskaźniki  $W'_z$  i  $W''_z$ :

$$W'_z = J_z/|y_1|, \quad W''_z = J_z/|y_2|, \quad (f)$$

<sup>(1)</sup> W normach państwowych, jak PN-59/H-93403, PN-59/H-93407 dla profili stalowych, oraz normach fabrycznych dla profili specjalnych.

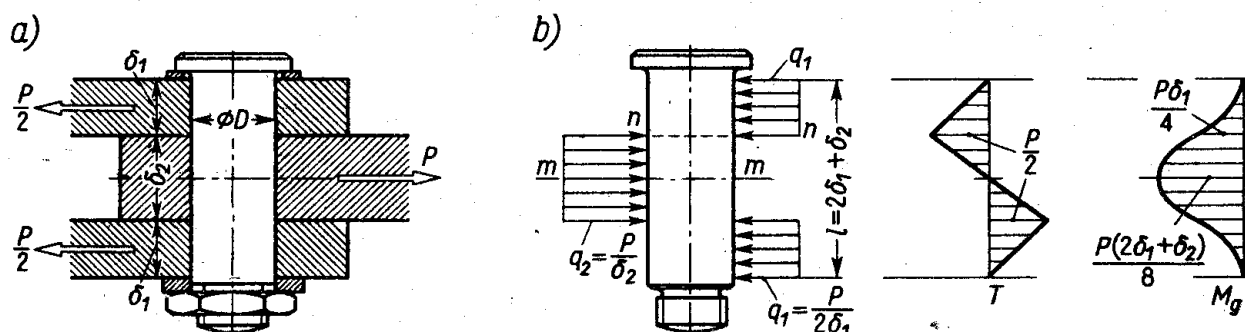


gdzie  $y_1, y_2$  – odpowiednie ekstremalne odległości włókien od osi  $z$ . Miarą jakości przekroju będzie wtedy

$$\eta_z = 2W_z/Ab, \quad (g)$$

gdzie  $b$  – gabarytowy wymiar przekroju w kierunku osi  $y$ . Interesujące jest, że wartość  $\eta_z$  dla profili dwuteowych i ceowych jest mała (rzędu  $0,17 \div 0,20$ ) i profile te wyraźnie są gorsze od innych, jak np. przekroju kołowego.

Zagadnienia nietypowe, gdy naprężenia styczne stanowią miernik bezpieczeństwa, należą do jednego z dwóch wariantów. Pierwszy występuje, gdy długość belki  $l$  jest tego samego rzędu co i gabarytowy wymiar  $h$ . Technicznym przykładem tego są połączenia nitowe i pasowane sworznie (rys. 5.47a). Zakładając dla prostoty, że naciski uszu na sworznie są równomiernie rozłożone, otrzymujemy obraz obciążeń sworznia i przebieg sił tnących



Rys. 5.47. Analiza pracy połączenia sworzniowego

oraz momentów gnących według rys. 5.47b. W świetle tego, co powiedziano o skutkach różnych sposobów wprowadzenia obciążeń, jest rzeczą jasną, że wyniki otrzymane z wzorów (5.14) i (5.18) są tu niezgodne z rzeczywistością. Jakikolwiek uściślenie analizy teoretycznej jest ponadto beznadziejne, z uwagi na szereg czynników o charakterze przypadkowym, np. dokładność pasowania, wpływ tarcia itp. W tej sytuacji obliczona dla przekroju  $m-m$  wartość  $\sigma_e$ , a dla przekroju  $n-n$  wartość  $\tau_{sr}$ :

$$\sigma_e = P(2\delta_1 + \delta_2)/8W_y, \quad \tau_{sr} = P/2A, \quad (h)$$

mają jedynie charakter względnego miernika, służącego do porównania danego połączenia z innymi udanymi konstrukcjami. Taki sposób jest szeroko stosowany w częściach maszyn. Wykorzystując istniejący zasób doświadczenia, ustala się z wzorów (h) nieprzekraczalne wartości  $\sigma_e$  bądź  $\tau_{sr}$  jako „naprężenia dopuszczalne” gwarantujące bezpieczeństwo. Takie „naprężenia dopuszczalne” nie mają żadnego uzasadnienia naukowego, lecz są praktyczną receptą, której stosowalność podlega wielu ograniczeniom, jak: rodzaj materiału, proporcje geometryczne, rodzaj maszyny.

Drugi wariant nietypowych zagadnień występuje, gdy wytrzymałość materiału belki na ścinanie jest mała. Takim materiałem jest na przykład drewno. Wykonana z niego krótka belka (rys. 5.43a) może ulec zniszczeniu przez poślizg w warstwie obojętnej. W takich przypadkach konieczne jest porównanie wartości  $\tau_{max}$  z wytrzymałością materiału na ścinanie i upewnienie się o istnieniu dostatecznego współczynnika bezpieczeństwa.